**Тема 3. Теория ожидаемой полезности**

* 1. Потребительский выбор в условиях риска
  2. Меры Эрроу-Пратта

3.3 Функция полезности U(), карта кривых безразличия

3.1 Потребительский выбор в условиях риска

Построение функции полезности индивида основано на следующих основных понятиях:

* простая лотерея (простой шанс) – лотерея с двумя исходами, вероятности которых известны и их сумма равна единице;
* гарантированный (безрисковый) эквивалент – доход (гарантированный выигрыш), который для данного индивида эквивалентен по полезности простой лотереи (случайному выигрышу).

Простая лотерея записывается как

,

где выигрыш с вероятность *Р*;

выигрыш с вероятностью (*1-Р*).

Таким образом, лотерея с 90% шансом выиграть 1000 д.е. и проиграть 3000 д.е., записывается как .

Ожидаемая полезность (т.е. математическое ожидание полезности) лотереи равна

Как правило, полезность в формальных записях обозначается через *U* – от анг. utility (полезность). Таким образом, ожидаемая полезность лотереи определяется путем суммирования полезности каждого ее исхода, взвешенной на соответствующую ему вероятность.

Полезность гарантированного эквивалента (обозначим через *G* от анг. guarantee (гарантия), по определению, равна ожидаемой полезности лотереи:

*.*

Естественно считать, что склонность или несклонность лица к риску определяется в зависимости от соотношения математического ожидания выигрыша в простую лотерею и гарантированного эквивалента.

Если индивид готов заплатить за право участия в лотерее сумму большую, чем математическое ожидание выигрыша в ней, то он считается склонным (расположенным) к риску (рискофилом), т.е. для него безрисковый вариант поведения менее предпочтителен, чем рисковый с тем же математическим ожиданием:

Если индивид готов заплатить за право участия в лотерее сумму меньшую, чем математическое ожидание выигрыша в ней, то он считается несклонным (нерасположенным) к риску (рискофобом), т.е. для него безрисковый вариант поведения предпочтительнее, чем рисковый с тем же математическим ожиданием:

Если индивид готов заплатить за право участия в лотерее сумму равную математическому ожиданию выигрыша в ней, то он считается нейтральным к риску, для него безрисковый вариант поведения эквивалентен рисковому с тем же математическим ожиданием:

Как определено ранее, для любого индивида вне зависимости от его отношения к риску полезность гарантированного эквивалента равна ожидаемой полезности лотереи , таким образом, объединяя полученные ранее соотношения, имеем, что

* для склонного к риску индивида:

– ожидаемая полезность лотереи (мат. ожидание полезности) всегда больше полезности мат. ожидания выигрыша по ней;

* для несклонного к риску индивида:

– ожидаемая полезность лотереи (мат. ожидание полезности) всегда меньше полезности мат. ожидания выигрыша по ней;

* для нейтрального к риску индивида:

– ожидаемая полезность лотереи (мат. ожидание полезности) всегда равна полезности мат. ожидания выигрыша по ней.

Строго говоря, склонность или несклонность индивида к риску определяется формой функции полезности от дохода.

Как известно (неравенство Йенсена), функция *f(x)* называется строго выпуклой, если для любых двух значений аргумента *x1, x2* и числа *0<λ<1*, выполняется неравенство:

Если для любых двух значений аргумента *x1, x2* и числа *0<λ<1*, выполняется неравенство:

то *f(x)* – строго вогнутая.

Если для любых двух значений аргумента *x1, x2* и числа *0<λ<1*, выполняется равенство:

то *f(x)* – линейная.

Если обозначить , то для строго выпуклой функции справедливо неравенство:

Это означает, что функция полезности от дохода индивида склонного к риску – строго выпуклая.

Проводя аналогичные манипуляции, легко получить, что функция полезности от дохода индивида несклонного к риску – строго вогнутая, функция полезности от дохода индивида нейтрального к риску – линейная.

Как известно, форма функции (выпуклость, вогнутость, линейность) определяется знаком ее второй производной.

Если функция *f(x)* дважды дифференцируема, то она выпуклая при *f″(x)* >0, вогнутая – при *f″(x)* < 0, линейная – при *f″(x)* = 0.

Итак, если функция полезности индивида от дохода *U(r)* дважды дифференцируема и он:

* склонен к риску, то *U″(r)*>0, т.е. предельная полезность *U′(r)* возрастает (каждая единица дохода приносит индивиду все большую дополнительная полезность);
* несклонен к риску, то *U″(r)<*0, т.е. предельная полезность *U′(r)* убывает (каждая единица дохода приносит индивиду дополнительная полезность меньшую, чем предыдущая);
* нейтрален к риску, то *U″(r)*=0, т.е. предельная полезность *U′(r)* постоянна (каждая единица дохода приносит индивиду одинаковую дополнительную полезность).

Рассмотрим пример, поясняющий представленный выше формализм.

Индивид в настоящий момент времени располагает 35000 д.е. и может принять участие в лотерее А, в которой возможен выигрыш 50000 д.е. с вероятностью 0,4 или выигрыш -10000 д.е. с вероятностью 0,6; или в лотерее Б, в которой возможен выигрыш 20000 д.е. с вероятностью 0,5 или выигрыш 10000 д.е. с вероятностью 0,5. Принимать ли ему участие в лотерее, если да, то в какой? Для лотереи, в которой субъект решил участвовать, вычислить полезность мат. ожидания и гарантированный эквивалент. Определить отношение субъекта к риску, если его функция полезности от дохода

Решение

Запишем лотерею А и Б в формальном виде (при вычислении исходов лотерей необходимо учесть величину начального капитала индивида): , .

У индивида имеется три варианта действий: не участвовать в лотереи, участвовать в лотереи А, участвовать в лотереи Б. Разумно считать, что критерием выбора является уровень ожидаемой полезности рассматриваемых альтернатив.

Таким образом, максимум ожидаемой полезности принесет третья альтернатива: участие в лотереи Б.

Для определения полезности мат. ожидания лотереи Б необходимо вначале его (мат. ожидание) вычислить.

Тогда, полезность математического ожидания лотереи Б равна

Как определено ранее, гарантированный эквивалент – это такой доход, полезность которого для индивида равна ожидаемой полезности лотереи.

Для определения отношения индивида к риску необходимо вычислить вторую производную его функции полезности от дохода:

Так как вторая производная отрицательна, то данный индивид несклонен к риску.

Аналогичный результат может быть получен, если анализ проводить и по другим критериям. Так, для несклонного к риску индивида характерно следующее:

Подводя итоги, важно заметить, что характер изменения функции полезности от дохода индивида *U(r)* может быть различным на разных участках. Наблюдения на финансовых рынках показывают, что преобладающий тип поведения их участников характерен для рискофобов.

Литература

1. Шапкин, А.С. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций [Текст] : учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 3-е изд. – М. : Издат.-торг. корпорация Дашков и Ко, 2008. – 880 с.